第 4 講　無限級数

PART1　無限級数の収束と発散

要点整理と公式

要点 ①　無限級数の収束と発散

無限数列 a_1，a_2，a_3，……，a_n，……の各項を，前から順に ＋ の記号で結んで得られる式

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots①$$

を「　　　　　」といい，a_1 をこの無限級数の初項，a_n を第 n 項という。

この無限級数を，記号Σを用いて $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ と書き表す。

無限数列 $\{a_n\}$ において，初項から第 n 項までの和を S_n とすると，数列 $\{S_n\}$ において

$$S_1=a_1$$
$$S_2=a_1+a_2$$
$$S_3=a_1+a_2+a_3$$
$$\cdots\cdots$$
$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$$

である。このとき

$$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$$

を，この無限級数の「第 n 項までの　　　　」という。

数列 $\{S_n\}$：S_1，S_2，S_3，……，S_n，……が収束して，その極限値が S，すなわち

$$\lim_{n\to\infty} S_n=S$$

のとき，無限級数①は「　　　」する，といい，この S を無限級数の「　　」という。

またこのとき

$$S=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots \quad \text{または} \quad S=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

と書き表す。

数列 $\{S_n\}$ が発散するとき，無限級数①は「　　　」する，という。

(ex) 無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots\cdots$$

について，初項から第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\qquad\qquad\right)$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

よって $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=$

したがって，この無限級数は「　　　」し，その「　　」は 1 である。

無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{2+\sqrt{3}}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\cdots\cdots$$

について，初項から第 n 項までの部分和を S_n とすると

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(2-\sqrt{3})+\cdots\cdots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$=$$

よって $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-1)=$

したがって，この無限級数は「　　　」する。

1 次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots\cdots$

(2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}+\cdots\cdots$

Point Pickup

無限級数の収束・発散

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束・発散は，「　　　　」S_n について

S_n が値 S に収束する …… $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束。$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の「　　」は S

S_n が発散する　　　　　…… $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散

第 4 講　PART1 確認問題

次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。また，答えは下の①～④のうちから選べ。

1 $\dfrac{1}{2\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot5}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots\cdots$

ア

① 収束し，その和は 1　② 収束し，その和は 2

③ 収束し，その和は $\dfrac{1}{2}$　④ 発散する

2 $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}+\cdots\cdots$

イ

① 収束し，その和は 1　② 収束し，その和は 2

③ 収束し，その和は $\dfrac{1}{2}$　④ 発散する

第 4 講　無限級数

PART1 無限級数の収束と発散

1　次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときはその和を求めよ。

(1) $\dfrac{1}{1\cdot3}+\dfrac{1}{3\cdot5}+\dfrac{1}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots\cdots$

(2) $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}+\cdots\cdots$

[解答]

(1) $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$ と変形できるから，第 n 項までの部分和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$

したがって，この無限級数は収束し，その和は $\dfrac{1}{2}$

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}=\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+2})(\sqrt{n}-\sqrt{n+2})}=\dfrac{\sqrt{n}-\sqrt{n+2}}{-2}=-\dfrac{1}{2}(\sqrt{n}-\sqrt{n+2})$

第 n 項までの部分和 S_n は

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{-\frac{1}{2}(\sqrt{k}-\sqrt{k+2})\right\}$$

$$=-\frac{1}{2}\{(1-\sqrt{3})+(\sqrt{2}-2)+(\sqrt{3}-\sqrt{5})+\cdots\cdots+(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1})+(\sqrt{n}-\sqrt{n+2})\}$$

$$=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})\right\}=\infty$

したがって，この無限級数は発散する。

第 4 講　PART1 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：③

[解説]

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$$

と変形できるから，第 n 項までの部分和 S_n は，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+$$

$$\cdots\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$

したがって，この無限級数は，[A]

収束し，その和は $\frac{1}{2}$

[A]　無限級数の収束

無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の部分和 S_n について，S_n が S に収束するとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束し，その和は S である。

2　**[正解] イ：④**

[解説]

$$\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}}{(\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1})(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1})}$$

[B]

$$=\frac{\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}}{(2n-1)-(2n+1)}$$

$$=-\frac{1}{2}(\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1})$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})$$

よって，第 n 項までの部分和 S_n は，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1})\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+(\sqrt{7}-\sqrt{5})+$$

$$\cdots\cdots+(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1})\}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)$$

よって，$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1)\right\}=\infty$

[C]

したがって，この無限級数は，

発散する

[B]　分母・分子に $\sqrt{2n-1}-\sqrt{2n+1}$ をかけ，分母を有理化する。

[C]　無限級数の発散
無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ の部分和 S_n について，S_n が発散するとき，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ も発散する。